Cvičení MAI 3 – 13.12.2019 (písemné)

I. Ještě k vyšetřování konvergence řad funkcí (viz cvičení – Konvergence řad funkcí):
na minulém cvičení jsme vyšetřovali absolutní lokálně stejnoměrnou konvergenci řad funkcí užitím kritéria Weierstrassova, ukažme vyšetření neabsolutně stejnoměrné konvergence:

Příklad: Je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$:

a) vyšetření stejnoměrné konvergence řady:

připomeňme kritéria pro neabsolutně stejnoměrnou konvergenci:

$\sum_{1}^{\infty} f_n(x)\cdot g_n(x)$, $f_n, g_n : M \subset R \to R$; pak $\sum_{1}^{\infty} f_n(x) g_n(x) \rightrightarrows$ na M, když jsou splněny (i) nebo (ii):

(i) (Abel) $\sum_{1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows$ na M a posloupnost $\{g_n(x)\}$ je na M stejně omezená a pro každé $x \in M$ je $\{g_n(x)\}$ monotónní;

(ii) (Dirichlet): $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ má na M stejně omezené částečné součty (tj. $\exists C \in R$ tak, že $\left|\sum_{1}^{k} f_n(x)\right| \le C$, $\forall x \in M$, $\forall k \in N$) $g_n(x) \rightrightarrows 0$ na M a pro každé $x \in M$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ monotónní.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$:

1) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n$ má stejně omezené částečné součty

2) $|g_n(x)| = \frac{1}{n+x^2} \le \frac{1}{n}$ pro $\forall x \in R$,

tedy $g_n(x) \rightrightarrows 0$ v R

3) $\frac{1}{x^2+n} \ge \frac{1}{x^2+n+1}$ $\forall x \in R, \forall n \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow$ posloupnost $\left\{ \frac{1}{x^2+n} \right\}$ je klesající pro $\forall x \in R$

$\Longrightarrow$ (dle Dirichletova kritéria) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \rightrightarrows$ v R

b) Označíme-li $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $f(x)$ je funkce spojitá v R

(díky stejnoměrné konvergenci řady a spojitosti členů řady)

c) Vypočtěte $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ („lze zaměnit" limitu a sumaci"?)

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \rightrightarrows$ v $(a, +\infty)$ $(a>0)$, $\lim_{x\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} = 0$ $\forall n$

$\Longrightarrow$ (věta Moore-Osgood) $\lim_{x\to\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} = \sum_{1}^{\infty} \lim \frac{(-1)^n}{n+x^2} = 0$.

tj. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

d) <u>Derivace $f'(x)$ v R</u> – „věta o derivování řady funkcí"

1) Uvažujme řadu $\sum_1^\infty \left(\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right)' = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n 2x}{(n+x^2)^2}$;

pro $x \in (-a,a)$, $a>0$ je $\left|\frac{(-1)^n 2x}{(n+x^2)^2}\right| \leq \frac{2a}{n^2}$, $\sum_1^\infty \frac{2a}{n^2}$ konverg. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (Weierstrass) $\sum_1^\infty \left(\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right)'$ konverguje lokálně stejnoměrně v R

a $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ konverguje v R (viz a)), tedy,

tj. $\underline{f'(x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n 2x}{(n+x^2)^2}}$ (lze derivovat „člen po členu"),

$x \in R$

e) Primitivní fce $F(x)$ k $f(x)$ existuje v R (díky spojitosti f v R) –

– <u>lze $F(x) = \sum_1^\infty \left(\int \frac{(-1)^n}{n+x^2}dx\right) + C$?</u>

(1) řada $\sum_1^\infty \int \frac{(-1)^n}{n+x^2}dx = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \rightrightarrows$ v R ;

(i) $\left|\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in R, \forall n \in N$

(ii) $\left\{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^\infty$ je monotónní pro $\forall x \in R$ (zřejmé)

(iii) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightrightarrows$ v R („konstantní" řada – číselná řada) (Leibnizovo kritérium)

Tedy, dle Abelova kriteria $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \rightrightarrows$ v $\mathbb{R}$,

tedy lze užít věty o derivování řady („člen po členu“) a tedy platí

$$(F(x))' = \left(\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)' = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)' =$$

$$= \sum_1^\infty (-1)^n \frac{1}{n+x^2} = f(x)$$

2. Analogicky se ukáže i stejnoměrná konvergence v $\mathbb{R}$ řady $\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$, a tedy, že jejího součet $f(x)$ je funkce spojitá v $\mathbb{R}$:

označme-li $f_n(x) = (-1)^n$, $g_n(x) = \frac{1}{n+\sin x}$, pak

(i) $\sum_1^\infty f_n(x)$ má omezené částečné součty $\left(\sum_1^\infty (-1)^n\right)$

(ii) $|g_n(x)| \leq \frac{1}{n-1}$ $\forall n \geq 2, x \in \mathbb{R}$ (stejně omezená posloupnost $\{g_n(x)\}$)

(iii) $\frac{1}{n+\sin x} \downarrow 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ pevné $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (dle Dirichletova kriteria) $\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n+\sin x} \rightrightarrows f(x)$ v $\mathbb{R}$,

členy řady jsou fce spojité, tedy $f(x)$ je fce spojitá v $\mathbb{R}$

II. Vyšetření konvergence mocninných řad

(viz opět pomůcka pro cvičení – Mocninné řady)

V „pomocném" textu cvičení mocninných řad je shrnutí

"(i) základních vlastností mocninných řad (stačí zatím uvažovat konvergenci v R);

(ii) řada příkladů vyřešených (konvergence řad, využití vzorců derivování i integrování mocninných řad „člen po členu" ke sčítání řad, k vyjádření primitivních funkcí pomocí mocninných řad.

Uvedeme si ještě jeden „souhrnný" příklad:

Příklad: Najděte obor konvergence mocninné řady

$$(*) \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$$

a v tomto oboru řadu sečtěte (najděte její součet)

1) Obor konvergence řady (*):

(i) poloměr konvergence: vyšetříme konvergenci řady např. Cauchyho odmocninovým kritériem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x-1}{2}\right| \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{|x-1|}{2} \quad \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\right),$$

tedy odtud dostaneme:

1) řada (*) konverguje pro $\frac{|x-1|}{2} < 1 \iff x \in (-1, 3)$ absolutně a lokálně stejnoměrně

a pro $\frac{|x-1|}{2} > 1$ (tj. $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$) (*) diverguje,

tj. řada konverguje pro $|x-1|<2$ a pro $|x-1|>2$ diverguje, tedy poloměr konvergence řady (*) je
$\underline{R=2}$.

2) pro $|x-1| = 2$ $(=R)$, dostaneme:

$x=-1$: $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (neabsolutně) (Leibniz)

a $x=3$: $\sum \frac{1}{n}$ diverguje

Tedy, obor konvergence řady (*) je $\mathcal{O} = \langle -1, 3)$

V intervalu $\langle -1,3)$ je součet řady spojitá funkce.

2) Součet řady (*) v oboru konvergence

(i) v intervalu $(-1,3)$ lze řadu (*) derivovat „člen po členu",

$$f'(x) = \left(\sum_1^\infty \frac{(x-1)^n}{n2^n}\right)' = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{(x-1)^n}{n2^n}\right)' = \sum_1^\infty \frac{(x-1)^{n-1}}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{3-x}$$ (součet geom. řady, $q=\frac{x}{2}$)

tedy, v $(-1,3)$ je $f(x) = \int \frac{1}{3-x}\,dx = -\ln(3-x) + C$

pro $x=1$ je $f(1)=0$, a tedy

$$0 = -\ln 2 + C \Rightarrow C = \ln 2,$$

a $\underline{f(x) = \ln\left(\frac{2}{3-x}\right), \ x\in(-1,3)}$

(ii) v bodě $x=-1$ je (dle vlastností mocninných řad) $f(x)$ spojitá zprava, i funkce $\ln\left(\frac{2}{3-x}\right)$ je tam spojitá v -1 zprava, tj.

$$f(-1) = \lim_{x\to -1+} \ln\left(\frac{2}{3-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 .$$

Řada dalších příkladů mocninných řad a vyšetřování jejich konvergence je v textu cvičení o mocninných řadách –
– zkuste za domácí úkol ukázat, že (analogicky k minulému příkladu)

$$(**)\quad \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x\ , \quad x \in \langle -1,1\rangle$$

1)

a tedy $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ ($x=1$ v $(**)$)

2) $$\int e^{-x^2}dx = \int \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\int x^{2n}dx$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (+\,C) \qquad \text{v } \mathbb{R}$$